# Čas 01

## Teorijski uvod

Neka je $V$ neprazan skup i $E$ skup neuređenih parova iz $V$, međusobno različitih elemenata. Uređeni par $G = (V, E)$ naziva se graf. Skup $V$ je skup čvorova, a skup $E$ je skup grana. Neka je $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, graf sa $|V| = n$ čvorova, $|E| = m$ grana. Dva čvora $v_i$ i $v_j$ su susedna ako grana $\{v_i, v_j\}$ pripada skupu $E$. Dve grane $e_i$ i $e_j$ su susedne ako imaju zajednički element iz V, $e_i \cap e_j = \{v\}$, $v \in V$. Čvor $v$, $v \in V$, i grana $e$, $e \in E$, su incidentni ako $v \in e$. Skup svih čvorova skupa $V$, koji su susedni sa čvorom $v$, $v \in V$, naziva se njegovom zvezdom, $z(v) = \{y \in V \mid \{v, y\} \in V\}$. Ukupan broj svih čvorova grafa $G = (V, E)$ koji su susedni sa čvorom $v$, $v \in V$, tj. ukupan broj svih grana grafa $G$ koje su incidentne sa čvorom $v$, je stepen ovog čvora i označava se sa $d(v)$.

Neka je $G = (V, E)$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, graf sa $|V| = n$ čvorova, $|E| = m$ grana, čiji je niz stepena čvorova $\Delta = d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n = \delta$, $d_i = d(v_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

**Teorema 1.** *Važi jednakost*

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m\,.$$

**Definicija 1.** *Za niz nenegativnih celih brojeva $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ kaže se da je grafovski ako postoji graf sa $n$ čvorova za koji je on niz stepena čvorova.*

**Definicija 2.** *Za niz nenegativnih celih brojeva $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ kaže se da je valjan ako je $n - 1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 0$,*

**Teorema 2.** *Neka je niz $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ valjan niz. Ako je izvedeni niz $d^{(1)} = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$, ili njegovo opadajuće preuređenje $\bar{d}^{(1)}$, takođe valjan, tada su nizovi $d$ i $d^{(1)}$, tj. $d$ i $\bar{d}^{(1)}$, istovremeno grafovski ili to nisu.*

Neka je dat niz $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Na osnovu teoreme 2 može da se formira sledeći algoritam za ispitivanje da li je on grafovski.

**Algoritam_grafovki_niz**

Korak 1. Ispituje se da li je niz $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ valjan. Ako jeste, prelazi se na Korak 2. Ako nije, preći na Korak 4.

Korak 2. Formira se niz $d^{(1)}$, tj. $\bar{d}^{(1)}$. Ispituje se da li je $d^{(1)}$, tj. $\bar{d}^{(1)}$, nula niz. Ako jeste, preći na Korak 3. Ako nije, uvodi se supstitucija $d := d^{(1)}$, tj. $d := \bar{d}^{(1)}$ i prelazi na Korak 1.

Korak 3. Niz $d$ je grafovski. Preći na Korak 5.

Korak 4. Niz $d$ nije grafovski.

Korak 5. Kraj.

U daljem tekstu biće navedene neke nejednakosti za realne nizove.

**Definicija 3.** *Neka je $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ niz pozitivnih brojeva. Tada su, redom,*

$$\begin{aligned} A_n(a) &= \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \\ G_n(a) &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \\ H_n(a) &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}, \end{aligned}$$

*aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina ovih brojeva.*

**AM–GM–HM nejednakosti.** Između aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine niza pozitivnih brojeva $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ važe sledeće nejednakosti

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Jednakosti važe ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

**Čebiševljeva (Chebyshev) nejednakost.** Neka je $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ niz pozitivnih realnih brojeva i $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ nizovi nenegativnih realnih brojeva. Ako su nizovi $a$ i $b$ iste monotonosti, tada važi nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i .$$

Ako su nizovi $a$ i $b$ suprotne monotonosti, važi obrnuta nejednakost. U oba slučaja jednakost važi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ ili $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

# Zadaci

**Zadatak 1.**

Dokazati da važi

$$2m\delta \le \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \le 2m\Delta.$$

**Rešenje.** Imamo

$$2m\delta = \delta \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} d_i\delta \le \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} d_i\Delta = \Delta \sum_{i=1}^{n} d_i = 2m\Delta.$$

**Zadatak 2.**

Dokazati da važe nejednakosti:

a) $\frac{n^2}{2m} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \le \frac{n(\Delta+\delta)-2m}{\Delta\delta}, \quad d_i \ne 0,$

b) $\frac{4m^2}{n} \le \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \le 2m(\Delta+\delta) - n\Delta\delta,$

Ispitati kada u ovim nejednakostima nastupaju jednakosti.

**Rešenje.** a) Neka je $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, graf bez izolovanih čvorova. Za svaki čvor $v_i \in V$ važi nejednakost

$$(d_i - \Delta)(d_i - \delta) \le 0,$$

tj.

$$d_i^2 + \Delta\delta \le (\Delta + \delta)d_i. \tag{1}$$

Kako je $d_i \ne 0$, za svako $i = 1, 2, \ldots, n$, množenjem ove nejednakosti sa $\frac{1}{d_i}$ i sumiranjem po $i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dobija se nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} d_i + \Delta\delta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \le (\Delta+\delta) \sum_{i=1}^{n} 1,$$

tj.

$$2m + \Delta\delta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \le n(\Delta+\delta),$$

odakle se dobija desna nejednakost u a).

Jednakost u (1), te samim tim u desnoj nejednakosti u a) važi ako i samo ako $d_i \in \{\delta, \Delta\}$, za svako $i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i harmonijske sredine, AM–HM nejednakosti, važi nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \geq n^2,$$

tj.

$$2m \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i} \geq n^2,$$

odakle se dobija leva nejednakost u a). Jednakost u ovoj nejednakosti, te samim tim u levoj nejednakosti pod a) važi ako i samo ako je $\Delta = d_1 = d_2 = \cdots = d_n = \delta$, tj. ako i samo ako je $G$ regularan graf.

b) Sabiranjem nejednakosti (1) po $i$, $i = 1, 2, \dots, n$, dobija se nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + \Delta\delta \sum_{i=1}^{n} 1 \leq (\Delta + \delta) \sum_{i=1}^{n} d_i,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 + n\Delta\delta \leq 2m(\Delta + \delta),$$

odakle se dobija desna nejednakost pod b). Jednakost u (1), te samim tim u desnoj nejednakosti pod b) važi ako i samo ako $d_i \in \{\delta, \Delta\}$, za svako $i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Na osnovu Čebiševljeve nejednakosti za $p_i = 1$, $a_i = b_i = d_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, dobija se nejednakost

$$\sum_{i=1}^{n} 1 \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \geq \left( \sum_{i=1}^{n} d_i \right)^2,$$

tj.

$$n \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \geq 4m^2,$$

odakle se dobija leva nejednakost pod b). Jednakost u ovoj nejednakosti, te samim tim u levoj nejednakosti pod b) važi ako i samo ako je $\Delta = d_1 = d_2 = \cdots = d_n = \delta$, tj. ako i samo ako je $G$ regularan graf.

**Zadatak 3.**

Dokazati da u razredu od $n$ učenika, $n \geq 2$, postoje bar dva učenika koji imaju jednak broj prijatelja u razredu.

**Rešenje.** Pridružimo zadatku graf $G = (V, E)$, $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, koji ima $n$ čvorova, pri čemu svaki čvor odgovara jednom učeniku. Dva čvora su susedna ako i samo ako su odgovarajući učenici prijatelji. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju u zadatku, da ne postoje dva učenika u odeljenju koji imaju isti broj prijatelja u razredu. To znači da su svi čvorovi u grafu različitog stepena, tj. da je

$$0 \leq d(x_1) < d(x_2) < \cdots < d(x_n) \leq n - 1.$$

To znači da u grafu $G$ postoji čvor $x_1$ tako da je $d(x_1) = 0$, da nije susedan ni sa jednim, i čvor $x_n$ tako da je $d(x_n) = n - 1$, tj. da je susedni sa svima. To je nemoguće.

**Zadatak 4.**

Neka je dat graf sa $n$ čvorova, gde je $n$ neparan broj. Dokazati da u datom grafu postoji čvor čiji je stepen paran.

**Rešenje.** Pretpostavimo suprotno, da ne postoji čvor čiji je stepen paran broj. Kako je $\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = 2m$, dobijamo da je na levoj strani ove jednakosti neparan, dok je na desnoj strani paran broj, što predstavlja kontradikciju.

**Zadatak 5.**

Dokazati da je broj čvorova neparnog stepena u svakom grafu paran.

**Rešenje.** Neka je dat graf $G = (V, E)$, $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $|E| = m$. Neka su, bez gubljenja opštosti, čvorovi $x_1, x_2, \ldots, x_p$, $1 \leq p \leq n$, neparnog stepena. Kako je

$$2m = \sum_{i=1}^{n} d(x_i) = \sum_{i=1}^{p} d(x_i) + \sum_{i=p+1}^{n} d(x_i),$$

i brojevi $2m$ i $\sum_{i=p+1}^{n} d(x_i)$ su parni, te je i broj $\sum_{i=1}^{p} d(x_i)$ paran, odakle sledi da je $p$ paran broj.

**Zadatak 6.**

Proveriti da li su sledeći nizovi grafovski (grafički):

a) $(7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$,

b) $(6, 4, 4, 4, 3, 3, 1)$,

c) $(6, 5, 5, 4, 3, 2, 1)$,

d) $(5, 4, 4, 3, 2, 2)$,

U slučaju potvrdnog odgovora skicirati odgovarajuće grafove.

**Rešenje.** a) Ako bi postojao graf čiji bi niz stepena čvorova bio $d = (7, 6, 5, 4, 3, 3, 2)$, on bi imao 7 čvorova. To bi značilo da bi najveći stepen nekog čvora bio 6, a ne 7. To znači da dati niz nije grafovski.

b) Ne, jer je broj čvorova neparnog stepena neparan.

c) Ako bi postojao graf čiji bi niz stepena čvorova bio $d = (6, 5, 5, 4, 3, 2, 1)$, najveći stepen nekog čvora bi bio 6 i broj čvorova neparnog stepena bi bio paran. Sve ovo je ispunjeno, te ne možemo zaključiti da li ovakav graf postoji ili ne. Moramo sprovesti proceduru da bismo ovo zaključili.

Korak 1. Formiramo novi (izvedeni) niz čvorova

$$\begin{array}{rcccccc} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ d^{(1)} = & (4, & 4, & 3, & 2, & 1, & 0). \end{array}$$

Ovaj niz je takođe valjan, te ne možemo ništa zaključiti.

Korak 2. Formiramo novi (izvedeni) niz čvorova

$$\begin{array}{rccccc} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ d^{(2)} = & (3, & 2, & 1, & 0, & 0). \end{array}$$

Ovaj niz je takođe valjan, te opet ne možemo ništa zaključiti.

Korak 3. Novi (izvedeni) niz čvorova je

$$\begin{array}{rcccc} & 4 & 5 & 6 & 7 \\ d^{(3)} = & (1, & 0, & -1, & 0). \end{array}$$

Ovaj niz nije valjan jer sadrži čvor stepena $-1$, što je nemoguće.

To znači da on nije grafovski, te ni polazni niz nije grafovski.

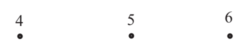
d) Dati niz $d = (5, 4, 4, 3, 2, 2)$ je valjan.

Korak 1. Izvedeni niz $d^{(1)} = \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ (3, & 3, & 2, & 1, & 1) \end{array}$ je valjan.

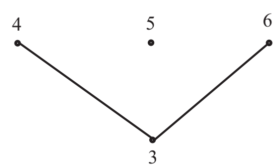
Korak 2. Novi izvedeni niz $d^{(2)} = \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 5 & 6 \\ (2, & 1, & 0, & 1), \end{array}$ tj. njegovo preuređenje $\overline{d}^{(2)} = \begin{array}{cccc} 3 & 4 & 6 & 5 \\ (2, & 1, & 1, & 0) \end{array}$ je valjan.

Korak 3. Novi izvedeni niz $d^{(3)} = \begin{array}{ccc} 4 & 6 & 5 \\ (0, & 0, & 0) \end{array}$ je nula niz. To znači da je polazni niz bio grafovski.

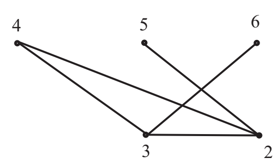
Na osnovu niza $d^{(3)}$ formiramo prazan graf




Na osnovu niza $\overline{d}^{(2)}$ formiramo novi graf sa 4 čvora




Na osnovu niza $d^{(1)}$ formiramo novi graf sa 5 čvorova




Sada na osnovu niza $d$ formiramo traženi graf